



KE KOPÍROVÁNÍ

Pracovní listy a ověření – gymnázium a SŠ

Pracovní listy jsou volitelný doplněk, aplet lze používat samostatně. Listy nabízejí procvičení a přenos dovedností na papír. Když je použijete, rozdávejte je až po práci v apletu a vyberte jen úlohy, které odpovídají cíli hodiny a potřebám žáků. Ověření slouží jako doklad o porozumění; v pilotním ověření ho prosím zařadte. Ověření používají jiné sítě než listy. Klíč řešení a bodování jsou na konci souboru.

List	Kdy ho použít	Aktivita v apletu
5A Reprezentace a jejich nároky	1. hodina	Seznam sousedů, Seznam hran, Matice
5B BFS a DFS	2. hodina, po vlastním pravidle	Krokování algoritmu
5C Dijkstrův algoritmus	3. hodina	Krokování algoritmu
Ověření 5	4. hodina, 45 min	—
5D–5E rozšíření	seminář	Nejlevnější propojení, Stejná síť jinak

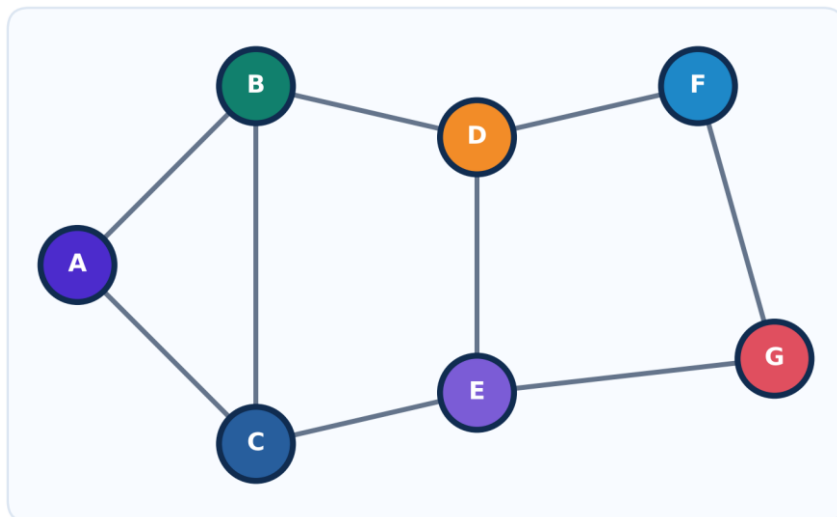


PRACOVNÍ LIST 5A · REPREZENTACE

Reprezentace a jejich nároky

Převádím graf mezi zápisy, hledám chyby a posuzuji, kdy se který zápis vyplatí.

V apletu: Seznam sousedů, Seznam hran, Matice sousednosti (vč. režimu „najdi chybu“).

**1**

Seznam sousedů a stupně vrcholů

Vrchol	A	B	C	D	E	F	G
sousedé							
stupeň							

2

Seznam hran

Zapiš všechny hrany. Ověř jejich počet pomocí součtu stupňů. Proč je součet stupňů vždy sudý?

**3****Matice sousednosti**

Doplň matici. Co znamená součet řádku? Proč je matice symetrická a na diagonále má nuly?

	A	B	C	D	E	F	G
A							
B							
C							
D							
E							
F							
G							

4**Najdi chyby v modelu**

Matice má popisovat neorientovaný graf bez smyček na vrcholech A–E. Obsahuje dvě chyby. Najdi je a vysvětli, proč takový zápis nemůže být správně.

	A	B	C	D	E
A	1	1	1	0	0
B	1	0	1	1	0
C	1	1	0	1	0
D	0	0	1	0	1
E	0	0	0	1	0

**5****Orientovaný graf z matice**

Řádek = odkud, sloupec = kam. a) Vypiš orientované hrany. b) Urči výstupní a vstupní stupeň vrcholu C. c) Najdi orientovanou cestu z B do D.

	A	B	C	D
A	0	1	0	1
B	0	0	1	0
C	1	0	0	0
D	0	0	1	0

a)

b)

c)

6**Nároky reprezentací**

Graf silniční sítě má 1 000 křižovatek a z každé vedou v průměru 4 silnice (asi 2 000 hran). a) Kolik políček má matice sousednosti a kolik položek seznam sousedů? b) Kterou reprezentaci zvolíš, když se často ptáš „jsou u a v sousedé?“, a kterou, když často procházíš všechny sousedy vrcholu?



BFS a DFS

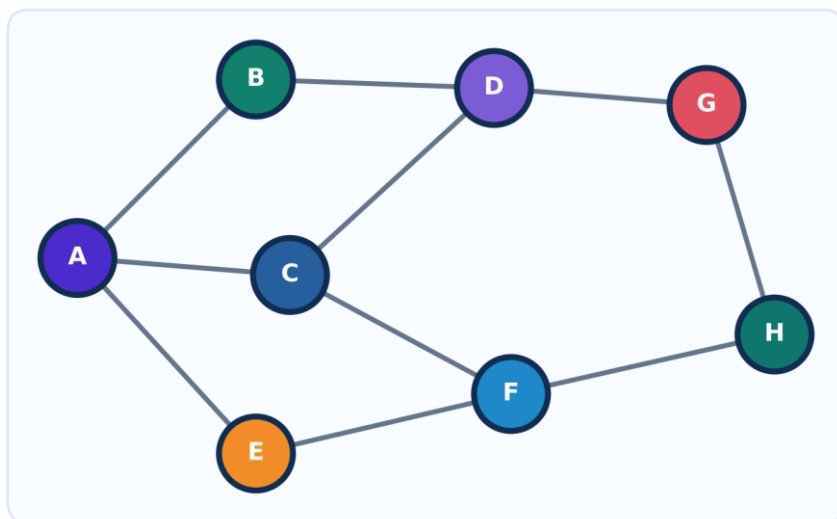
Předpovídám další krok a vysvětluji, co který průchod zaručuje.

V apletu: Krokování algoritmu – BFS a DFS od zadaného vrcholu, žák tipuje další zpracovaný vrchol. Až po vlastním průchodu (Průzkum sítě).

1

Nejdřív vlastní pravidlo

Jak bys systematicky prošel/prošla neznámý graf, abys žádný vrchol nevynechal/a a zbytečně neopakoval/a?

**2**

BFS od A

Zapiš pořadí zpracování a rozděl vrcholy do vrstev podle vzdálenosti (počtu hran) od A.

Pořadí**Vrstvy**

0: A 1: 2: 3:

**3****DFS od A podle pravidla apletu**

Po zpracování vrcholu vlož jeho nenavštívené sousedy do zásobníku abecedně; zpracuj vrchol nahoře. Zapisuj obsah zásobníku (dno → vrchol).

Krok	Zpracovaný vrchol	Zásobník po kroku (dno → vrchol)
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

4**Předpověď**

BFS právě dokončil zpracování vrcholu C. Co je ve frontě a který vrchol přijde na řadu?

5**Co který průchod zaručuje?**

Doplň: BFS se hodí, když... DFS se hodí, když... Který z nich najde cestu s nejmenším počtem hran?

6**Najdi a oprav chybu v algoritmu**

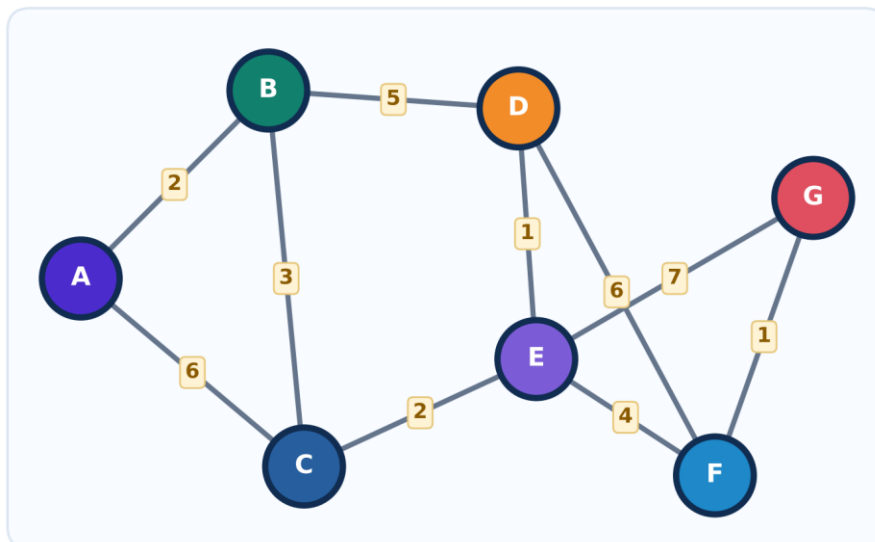
„1. Vlož start do fronty. 2. Dokud fronta není prázdná: vyber první vrchol, zpracuj ho a vlož do fronty všechny jeho sousedy.“ Co se pokazí v grafu s kružnicí? Jak postup opravíš?



PRACOVNÍ LIST 5C · NEJKRATŠÍ CESTY

Dijkstrův algoritmus

Rozhoduje součet ohodnocení, ne počet hran.

V apletu: Krokování algoritmu – Dijkstra; při shodě vzdáleností aplet přijme kteroukoli rovnocennou volbu.**1**

Běh algoritmu

V každém kroku finalizuj nehotový vrchol s nejmenší známou vzdáleností a uprav vzdálenosti jeho sousedů. Do řádku zapiš stav po kroku (∞ = zatím neznámá).

Finalizují	A	B	C	D	E	F	G
A	0						

**2****Výsledek**

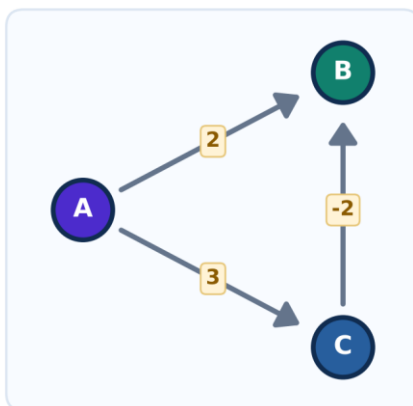
Konečné vzdálenosti od A, pořadí finalizace (všimni si shody) a nejkratší cesta $A \rightarrow G$ s délkou. Jak cestu zpětně zrekonstruuješ?

Pořadí finalizace**Nejkratší cesta $A \rightarrow G$** **Rekonstrukce****3****Proč ne BFS?**

Najdi cestu $A \rightarrow G$ s nejmenším počtem hran a porovnej její délku s výsledkem Dijkstry.

4**Výzva: záporné ohodnocení**

Spust Dijkstrův algoritmus od A v orientovaném grafu vpravo. Jakou vzdálenost přiřadí vrcholu B? Jaká je skutečná délka nejkratší cesty $A \rightarrow B$? Který předpoklad algoritmu je porušen?

**5****Nároky**

Kolikrát se v Dijkstrově algoritmu finalizuje každý vrchol? Kolikrát se nejvýš „prohlédne“ každá hrana neorientovaného grafu?

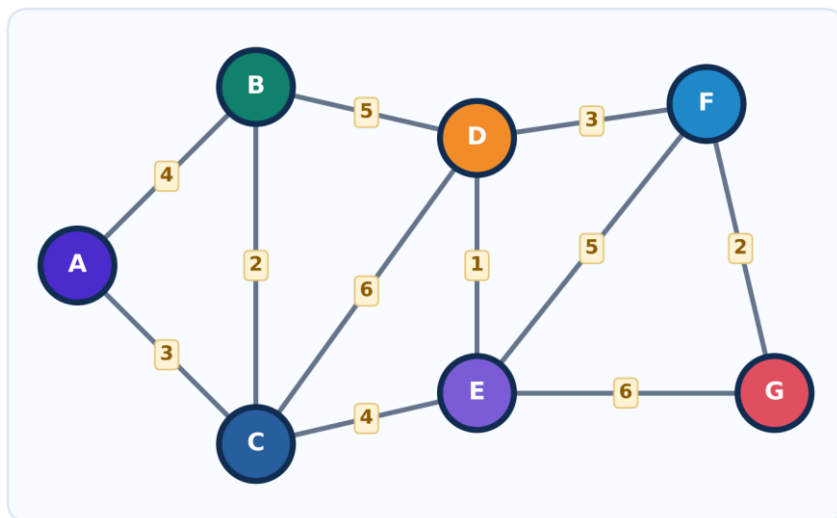


PRACOVNÍ LIST 5D · ROZŠÍŘENÍ · MINIMÁLNÍ KOSTRA

Tři algoritmy, jedna kostra

Porovnám vlastní strategii s postupy podle Kruskala, Jarníka a Borůvky.

V apletu: Nejlevnější propojení – nejdřív volné hledání, potom krokované zvolení algoritmu (Kruskal, Jarník, Borůvka).

**1**

Vlastní pokus

Najdi kosteru s co nejmenším součtem ohodnocení. Vypiš hrany a cenu.

2

Kruskal

Zapiš pořadí přijatých hran a první odmítnutou hranu. Proč byla odmítnuta?

3

Jarník (Prim) od A

Zapiš pořadí, v jakém se hrany přidávají ke stromu.

**4****Borůvka**

V 1. kole si každý vrchol vybere nejlevnější hranu, která z něj vede. Které hrany se přidají a kolik komponent vznikne? Co se stane ve 2. kole?

5**Srovnání**

Proč dávají všechny tři algoritmy stejnou cenu, i když vybírají hrany v jiném pořadí? Kdy je minimální kostra jediná?

6**Kostra není síť nejkratších cest**

Jaká je vzdálenost A – B v nalezené kostře a jaká v celém grafu? Co z toho plyne?

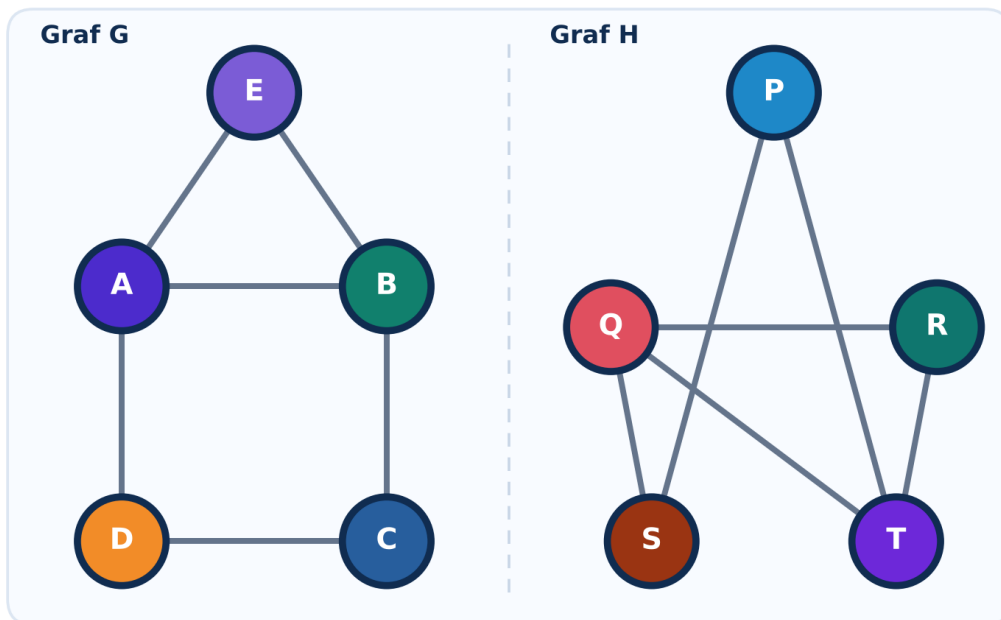


PRACOVNÍ LIST 5E · ROZŠÍŘENÍ · STRUKTURA

Izomorfismus a invarianty

Buď najdu přiřazení zachovávající všechny hrany, nebo invariant, ve kterém se grafy liší.

V apletu: Stejná síť jinak (izomorfismus).

**1**

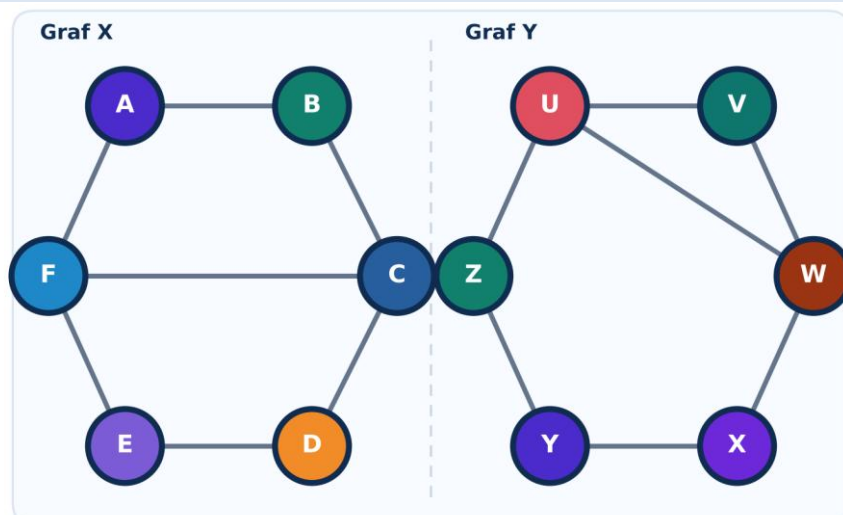
Grafy G a H

Urči stupně vrcholů. Jsou grafy izomorfní? Pokud ano, napiš přiřazení $A \rightarrow ?$, $B \rightarrow ?$, $C \rightarrow ?$, $D \rightarrow ?$, $E \rightarrow ?$.

2

Ověření

Vypiš obrazy všech hran grafu G a zkontroluj, že jsou hranami grafu H.

**3****Grafy X a Y**

Oba mají posloupnost stupňů 3, 3, 2, 2, 2, 2. Jsou izomorfní? Najdi vlastnost (invariant), která je odliší.

4**Invarianty obecně**

Napiš tři invarianty grafu a vysvětli, proč shoda všech tří izomorfismus ještě nedokazuje.



OVĚŘENÍ 5 · GYMNAZIUM / SŠ

Grafy, reprezentace a algoritmy

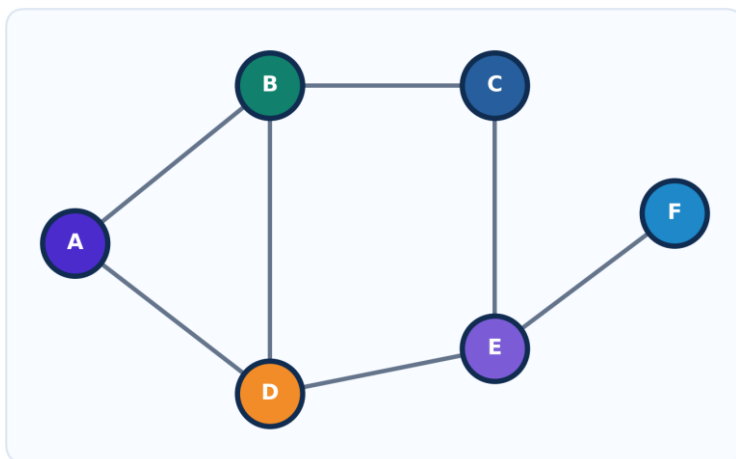
Samostatná práce bez apletu · doporučený čas 45 minut · základ 40 b + bonus 6 b

Jméno a příjmení	Třída	Datum

Používej odborné názvosloví. U BFS a DFS řaď nové sousedy abecedně jako v apletu (DFS: zásobník, zpracuje se vrchol nahoře). U Dijkstry je při shodě možné vybrat kterýkoli rovnocenný vrchol.

1**Reprezentace [10 b]**

a) Zapiš seznam sousedů. b) Dopln matici sousednosti. c) Urči počet hran ze součtu stupňů a vysvětli proč.

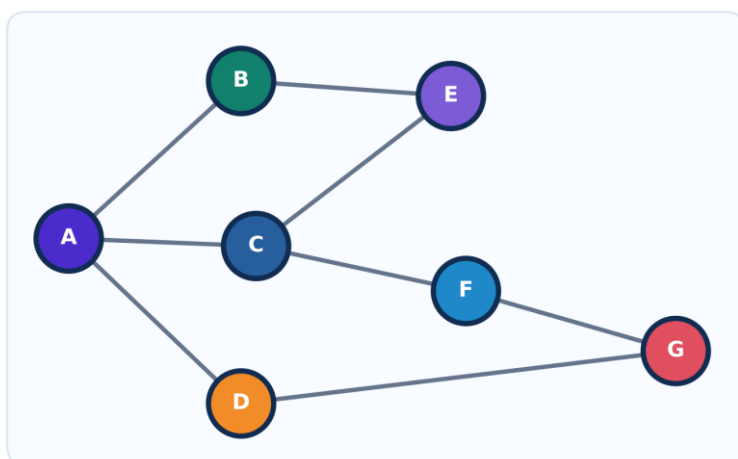


A	
B	
C	
D	
E	
F	



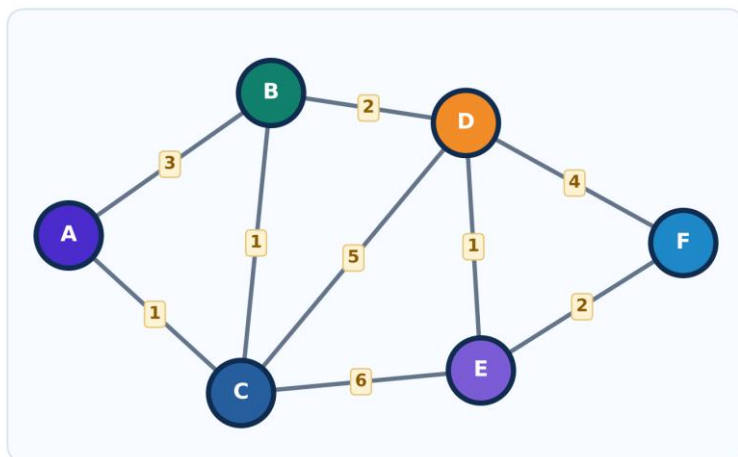
b)	A	B	C	D	E	F
A						
B						
C						
D						
E						
F						

c)

2**BFS a DFS od vrcholu A [8 b]****a) BFS – pořadí****b) DFS – pořadí**

**3****Dijkstrův algoritmus od A [10 b]**

a) Konečné vzdálenosti od A. b) Pořadí finalizace. c) Nejkratší cesta A → F a její délka.



	A	B	C	D	E	F
a) vzdálenost	0					

b) pořadí

c) cesta, délka

4**Orientovaný graf z matice [6 b]**

Řádek = odkud, sloupec = kam. a) Vypiš orientované hrany. b) Proč matice není symetrická? c) Najdi orientovanou cestu z A do D. d) Urči vstupní stupeň vrcholu C a řekni, co znamená.

	A	B	C	D
A	0	0	1	0
B	1	0	0	1
C	0	1	0	0
D	0	0	1	0

a)

b)

c)

d)



5

Posuď tvrzení [6 b]

- a) „BFS najde nejkratší cestu i v ohodnoceném grafu, stačí ho spustit od startu.“ Oprav a zdůvodni, co BFS minimalizuje a co Dijkstra.
- b) „Pro graf s 10 000 vrcholy a 30 000 hranami je matice sousednosti lepší než seznam sousedů, protože je přehlednější.“ Posuď z hlediska paměťových nároků a typických operací.

a)

b)

ROZŠÍŘENÍ – bonus (není součástí základního maxima 40 b)

B1

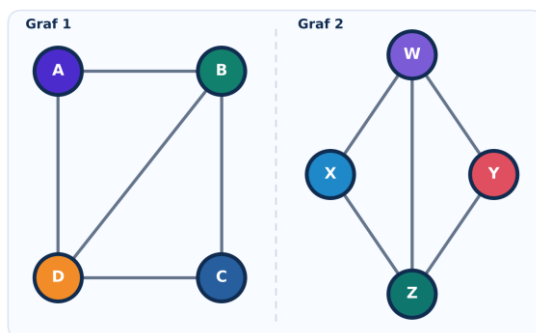
Minimální kostra [4 b]

Najdi minimální kostru grafu z úlohy 3 a její cenu.

B2

Izomorfismus [2 b]

Jsou grafy izomorfní? Pokud ano, uveď přiřazení vrcholů.



Základ

___ / 40

Bonus

___ / 6

Hodnocení

Zpětná vazba (nehodnotí se): Která aktivita v apletu ti k těmto úlohám pomohla nejvíc a proč?

.....



PRO UČITELE

Hodnocení a bodování

Ověření kontrolují přenos porozumění mimo aplet; rozšíření jsou bodově oddělená.

Zásada. Znamku počítejte ze základního maxima dané úrovně. Bonusové body mohou výsledek jen zlepšit (výsledek pro převod zastupujte na 100 %); jejich nevypracování nesmí známku zhoršit.

Navržené převodní pásmo (gymnázium)

Znamka	% ze základu	Interpretace
1	90–100 %	bezpečné porozumění a správný přenos do nové sítě
2	75–89 %	převážně správně, dílčí chyby
3	60–74 %	základ zvládnut, nejistota v přenosu
4	45–59 %	částečné zvládnutí, významné mezery
5	0–44 %	základní porozumění zatím neprokázáno

Jde o návrh; pravidla hodnocení školy mají přednost.

Ověření 5 · gymnázium – 40 b + 6 b

Úloha	Body	Kritérium
1 Reprezentace	10	a) seznam sousedů 4 b (po 1 b za vrcholy A–B, C–D, E, F... hodnoťte úměrně: 6 správných řádků = 4 b); b) matice 4 b úměrně správným polím; c) 7 hran 1 b, zdůvodnění (každá hrana přispívá ke dvěma stupňům) 1 b.
2 BFS a DFS	8	Každé pořadí 4 b; jedna lokální záměna se správným principem 3 b; částečně správný princip 1–2 b.
3 Dijkstra	10	a) 1 b za každou správnou vzdálenost B–F (5 b); b) pořadí finalizace 2 b; c) cesta 2 b, délka 1 b.
4 Orientovaná matice	6	a) 2 b (všech 5 hran 2 b, 3–4 hrany 1 b); b) 1 b; c) 1 b; d) vstupní stupeň 2 = 1 b, význam (počet hran, které do C vedou) 1 b.
5 Posouzení	6	a) BFS minimalizuje počet hran 1 b, ignoruje ohodnocení / protipříklad 1 b, Dijkstra minimalizuje součet ohodnocení 1 b; b) srovnání paměti ($10^8 \times$ řádově $6 \cdot 10^4$) 2 b, typická operace a závěr 1 b.
Bonus B1 Kostra	4	Pět správných hran 3 b, cena 7 = 1 b.
Bonus B2 Izomorfismus	2	Verdikt 1 b; úplné správné přiřazení 1 b.

Co při opravování nepenalizovat

- **Graf není obrázek.** Jiné rozmístění vrcholů, otočení nebo „hezčí / horší“ kresba nejsou chyba, pokud zůstala zachována správná spojení.
- **Rovnocenné odpovědi.** Uznejte všechny správné trasy se stejným počtem kroků nebo stejnou cenou, pokud zadání nepředepisuje rozhodovací pravidlo; u Dijkstry libovolné pořadí vrcholů se shodnou vzdáleností.



- **Názvosloví podle úrovně.** Preferujte „vrchol, hrana, graf, ohodnocení“ – jazykový přešlap sám o sobě nemá převážit správné porozumění.
- **Otevřené odpovědi** hodnotte podle konkrétnosti a funkčnosti postupu, ne podle shody se vzorovou větou.

PRO UČITELE

Klíč řešení

U otevřených úloh jsou uvedeny příklady správných odpovědí; rovnocenné formulace a jiné správné trasy uznejte.

List 5A • Reprezentace

- ✓ 1: A: B, C (2) · B: A, C, D (3) · C: A, B, E (3) · D: B, E, F (3) · E: C, D, G (3) · F: D, G (2) · G: E, F (2).
- ✓ 2: AB, AC, BC, BD, CE, DE, DF, EG, FG – **9 hran**; součet stupňů $18 = 2 \cdot 9$. Každá hrana přispívá ke stupňům dvou vrcholů.
- ✓ 3: součet řádku = stupeň vrcholu; symetrie = neorientovanost; nuly na diagonále = žádné smyčky.
- ✓ 4: **A–A = 1** (smyčka); **B–D = 1, ale D–B = 0** (nesymetrie).
- ✓ 5: $A \rightarrow B, A \rightarrow D, B \rightarrow C, C \rightarrow A, D \rightarrow C$; C: výstupní 1, vstupní 2; $B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow D$.
- ✓ 6: matice 10^6 políček; seznam sousedů asi 4 000 položek (+ 1 000 vrcholů). Dotaz „jsou sousedé?“ – matice (okamžitě); procházení sousedů – seznam (úměrně stupni); pro řídký graf seznam.

List 5B • BFS a DFS

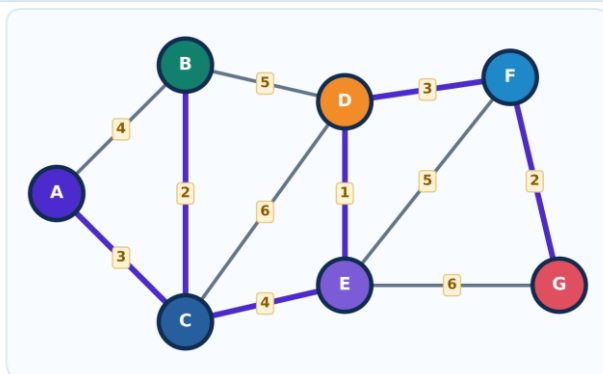
- ✓ 2: **A, B, C, E, D, F, G, H**; vrstvy 1: B, C, E · 2: D, F · 3: G, H.
- ✓ 3: zásobník po krocích: A [B, C, E] · E [B, C, F] · F [B, C, H] · H [B, C, G] · G [B, C, D] · D [B, C] · C [B] · B []. Pořadí **A, E, F, H, G, D, C, B**.
- ✓ 4: fronta [E, D, F], další je **E**.
- ✓ 5: BFS – nejmenší počet hran ze startu (nejkratší cesta v neohodnoceném grafu); DFS – projde celou komponentu do hloubky (dosažitelnost, bludiště, hledání cyklu), nejkratší cestu nezaručuje.
- ✓ 6: vrcholy se do fronty vkládají opakovaně, v grafu s kružnicí algoritmus neskončí; oprava: vkládat jen dosud neobjevené vrcholy a označit je při objevení.

List 5C • Dijkstrův algoritmus

- ✓ 1: po A: B 2, C 6 · po B: C 5, D 7 · po C: E 7 · po D: F 13 · po E: F 11, G 14 · po F: G 12 · G.
- ✓ 2: A 0, B 2, C 5, D 7, E 7, F 11, G 12; pořadí A, B, C, D, E, F, G nebo A, B, C, E, D, F, G (D a E mají shodně 7). Cesta **A – B – C – E – F – G, délka 12**; rekonstrukce přes předchůdce od G zpět.
- ✓ 3: nejméně hran má A – C – E – G (3 hrany), ale délka $15 > 12$.
- ✓ 4: Dijkstra finalizuje B s hodnotou 2, skutečně $A \rightarrow C \rightarrow B = 1$. Algoritmus předpokládá nezáporná ohodnocení.
- ✓ 5: každý vrchol se finalizuje právě jednou; každá neorientovaná hrana se prohlédne nejvýš dvakrát (z každého konce jednou).

List 5D • Minimální kostra

- ✓ 1, 2: Kruskal: D–E (1), B–C (2), F–G (2), A–C (3), D–F (3), [A–B (4) odmítnuta – uzavřela by kružnici A–B–C], C–E (4). Cena **15**.
- ✓ 3: Jarník od A: A–C, C–B, C–E, E–D, D–F, F–G.
- ✓ 4: 1. kolo: A–C, B–C, D–E, F–G → 3 komponenty {A, B, C}, {D, E}, {F, G}; 2. kolo: C–E a D–F → hotovo.
- ✓ 5: všechny tři budují minimální kostru; když jsou ohodnocení navzájem různá, je jediná (zde je jediná i přes shody).
- ✓ 6: v kostře A – C – B = 5, v grafu přímo A – B = 4 → kostra nezachovává nejkratší cesty.



List 5E · Izomorfismus

- ✓ 1: G: A 3, B 3, C 2, D 2, E 2 · H: P 2, Q 3, R 2, S 2, T 3. Izomorfní, např. **A→Q, B→T, C→P, D→S, E→R**.
- ✓ 2: AB→QT, BC→TP, CD→PS, DA→SQ, AE→QR, BE→TR – vše hrany grafu H.
- ✓ 3: nejsou: Y obsahuje trojúhelník U–V–W, X žádný (má dvě kružnice délky 4).
- ✓ 4: např. počet vrcholů a hran, posloupnost stupňů, počet trojúhelníků, souvislost, délka nejkratší kružnice; jsou to nutné, ne postačující podmínky.

Ověření 5 · Grafy, reprezentace a algoritmy

- ✓ 1: A: B, D · B: A, C, D · C: B, E · D: A, B, E · E: C, D, F · F: E. Matice řádky A 010100 · B 101100 · C 010010 · D 110010 · E 001101 · F 000010. Součet stupňů 14 → **7 hran**.
- ✓ 2: BFS **A, B, C, D, E, F, G**; DFS **A, D, G, F, C, E, B**.
- ✓ 3: B 2, C 1, D 4, E 5, F 7; pořadí A, C, B, D, E, F; cesta **A – C – B – D – E – F**, **délka 7**.
- ✓ 4: A→C, B→A, B→D, C→B, D→C; graf je orientovaný; A → C → B → D; vstupní stupeň C = 2 (z A a z D).
- ✓ 5a: BFS minimalizuje počet hran, ohodnocení ignoruje; nejmenší součet ohodnocení (pro nezáporná ohodnocení) hledá Dijkstra. 5b: matice 10^8 políček, seznam asi $6 \cdot 10^4$ položek; pro řídký graf seznam, matice jen pro husté grafy nebo časté dotazy na existenci hrany.
- ✓ B1: A–C (1), B–C (1), D–E (1), B–D (2), E–F (2), cena **7**. B2: ano, A→X, B→W, C→Y, D→Z.

